



Olimpiada națională de matematică

etapa locală

05.03.2016

Clasa a XII-a

BAREM DE CORECTARE

1. a) Arătați că, $(x \cdot \sin x + \cos x)' = x \cdot \cos x, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

b) Să se calculeze $\int \frac{1}{(\frac{\cos x}{x} + \sin x)^2} dx, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Traian Tămâian și Buth Gigel

Soluție:

calcul direct

1p

$$I = \int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx = \int \frac{\frac{x}{\cos x} (x \sin x + \cos x)'}{(x \sin x + \cos x)^2} dx = - \int \frac{x}{\cos x} \left(\frac{1}{x \sin x + \cos x} \right)' dx =$$

2p

$$= - \frac{x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} + \int \left(\frac{x}{\cos x} \right)' \frac{1}{x \sin x + \cos x} dx = - \frac{x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} +$$

1p

$$\int \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x} \frac{1}{x \sin x + \cos x} dx = - \frac{x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

2p

$$= - \frac{x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} + \operatorname{tg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1p

2. Fie $(G, *)$ un grup finit astfel încât funcția $f: G \rightarrow G, f(x) = x^2$ este automorfism al grupului. Demonstrați că G are un număr impar de elemente.

Nevelits Gyöngyvér, Cziprok András

Soluție:

demonstrăm că $x \neq x^{-1}, \forall x \in G - \{e\}$ prin reducere la absurd

2p



Presupunem că $\exists x \in G - \{e\}, x = x^{-1}$ atunci $x^2 = e$ 2p

atunci $f(x) = e$ și cum $f(e) = e$ rezultă din injectivitatea lui f că $x = e$ absurd 1p

Dacă grupăm elementele x cu x^{-1} , ceea ce înseamnă un număr par de elemente cu e impar 2p

3. Studiați dacă funcția $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}, & \text{dacă } x \in (0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

admite primitive. În caz afirmativ determinați o primitivă a funcției f .

Nevelits Gyöngyvér, Cziprok András

Soluție:

Se verifică ușor că f este continuă pe $[0, \frac{\pi}{2}]$ inclusiv în 0 2p

se consideră $F(x) = \begin{cases} c_1, & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{1}{x} - \operatorname{ctgx} + c_2, & \text{dacă } x \in (0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$ 1p

$F(x)$ continuă în 0 rezultă $c_1 = c_2 = c$ 1p

$F(x)$ derivabilă și $F(x)$ derivat este $f(x) \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 2p

finalizare pentru c fixat 1p

4. Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$ și $\mathbb{Q}(\varepsilon) = \{a + \varepsilon b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

a) demonstrați că inversa oricărui element nenul din $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ aparține mulțimii $\mathbb{Q}(\varepsilon)$.

b) demonstrați că mulțimea $M = \{a^2 - ab + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ este partea stabilă lui \mathbb{Z} față de înmulțirea numerelor.

Kató Enikő

Soluție:

a) $a + \varepsilon b \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \vee b \neq 0$ 1p

inversa este de forma $a' + \varepsilon b'$ astfel $(a + \varepsilon b)(a' + \varepsilon b') = 1$ 1p



Se obține un sistem și ținând cont că ε este rădăcina de ordinul 3 a unității rezultă că există unic inversa lui $a + \varepsilon b$ 2p

b) $(a + \varepsilon b)(a + \bar{\varepsilon}b) = a^2 - ab + b^2$ 1p

$$(a^2 - ab + b^2)(c^2 - cd + d^2) = (a + \varepsilon b)(a + \bar{\varepsilon}b)(c + \varepsilon d)(c + \bar{\varepsilon}d) \\ = (m + \varepsilon n)(m + \bar{\varepsilon}n) = m^2 - mn + n^2$$

unde $m = ac - bd$ și $n = ad + bc - bd$ 1p

finalizare 1p